$f(b)-f(a)=(b^3+2b+2)-(a^3+2a+2)=b^3-a^3+2(b-a)=(b-a)(b^2+ab+a^2)+2(b-a)$
$=(b-a)(b^2+ab+a^2+2)$

Or $b-a>0$ et $b^2+ab+a^2+2>0$ donc $f(b)-f(a)>0$ et par suite f est croissante sur $]-\infty,0[$

b) → f est continue sur $]-\infty,0[$
→ f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$
→ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $f(0)=2$ donc f change de signe sur $]-\infty,0[$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet donc de conclure que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique $\alpha\in]-\infty,0[$

c) $f(-0,8)=-0,112$ et $f(-0,7)=0,257$ donc f change de signe dans l'intervalle $]-0.8,-0.7[$ et par suite $-0,8\le\alpha\le-0,7$

3) a) Soit $a,b\in]0,+\infty[$ tel que $a<b$ alors $a<b\Leftrightarrow a^2<b^2\Leftrightarrow a^2+4<b^2+4\Leftrightarrow\sqrt{a^2+4}<\sqrt{b^2+4}$ donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et par suite f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $J=f(]0,+\infty[)=\left]f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=]2,+\infty[$

Soient $y\in]2,+\infty[$ et $x\in]0,+\infty[$, $y=f(x)\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2+4}\Leftrightarrow y^2=x^2+4\Leftrightarrow x^2=y^2-4$ or $x>0$ donc $x=\sqrt{y^2-4}$ et par suite $x\mapsto\sqrt{x^2-4}$ est la fonction réciproque de g

Exercice n° 5

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3-3x+2=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-3x+2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

2) a) La fonction f est dérivable sur IR comme étant une fonction polynôme et on a $f'(x)=3x^2-3$

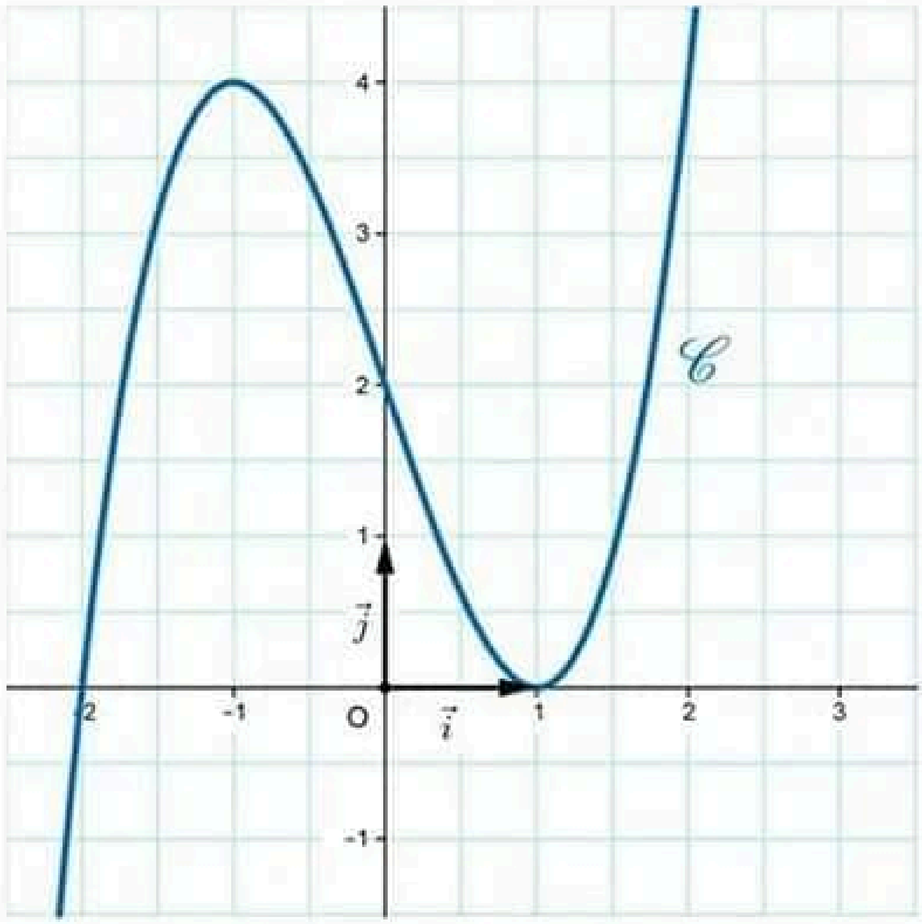
b)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

c) f possède un maximum relatif en -1 égale à 4 et un minimum relatif en 1 égale à 0

3) f' est dérivable sur IR et on a $f''(x)=6x$. f'' s'annule en 0 en changeant de signe donc le point $A(0,f(0))=(0,2)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$

4)



5) a) g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $g([1,+\infty[) = [0,+\infty[$

b) $f(2) = 2^3 - 3\times 2 + 2 = 4$ et $(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(4))} = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{9}$

6) a) f est continue sur IR donc elle possède des primitives sur IR

b) Une primitive de f s'écrit sous la forme $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + k$

$F(-2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\times 16 - \frac{3}{2}\times 4 - 2\times 2 + k = 0 \Leftrightarrow k = 6$ donc $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 6$

Exercice n° 6

Partie A

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $f(0) = \frac{3}{2}$ $\quad f'(0) = 0$ $\quad f(1) = \frac{1}{2}$ $\quad f'(1) = -\frac{3}{2}$ $\quad f(2) = -\frac{1}{2}$ $\quad f'(2) = 0$

3)

x	-1		0		2		$+\infty$
f	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1) La fonction f est continue sur $]-1,+\infty[$ comme étant un polynôme

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{1}{2}(x^3 - 3x^2 + 3) = -\frac{1}{2} = f(-1)$ donc f est continue à droite en -1 et par suite f est continue sur $[-1,+\infty[$

2) a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0,2]$ et on a

$f(0)f(2) = \frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation

$f(x)=0$ possède une solution unique $\alpha \in [0,2]$

b) $\left.\begin{array}{l} f(1{,}34)=0.009652 \\ f(1{,}35)=-0.0035625 \end{array}\right\}$ donc f change de signe entre 1,34 et 1,35 donc $1{,}34<\alpha<1{,}35$

3) a) $\frac{1}{2}(x+1)(x-2)^2=\frac{1}{2}(x+1)(x^2-4x+4)=\frac{1}{2}(x^3-4x^2+4x+x^2-4x+4)=\frac{1}{2}(x^3-3x^2+4)$

$=\frac{1}{2}(x^3-3x^2+3)+\frac{1}{2}=f(x)-f(-1)$

b) $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{\frac{1}{2}(x+1)(x-2)^2}{(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{(x-2)^2}{2}=\frac{9}{2}$ donc f est dérivable à droite en -1 et on a $f'(-1)=\frac{9}{2}$

4) La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme étant fonction polynôme et on a $f'(x)=\frac{1}{2}(3x^2-6x)=\frac{3}{2}x^2-3x$

Exercice n° 7

1) a) $Df=IR\setminus\{-1\}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^2+5x+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x^2}{x}=-\infty$

c) On a pour tout $x\in Df$.

$-3x+8-\frac{4}{x+1}=\frac{(-3x+8)(x+1)-4}{x+1}=\frac{-3x^2-3x+8x+8-4}{x+1}=\frac{-3x^2+5x+4}{x+1}=f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-3x+8)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\frac{4}{x+1}\right]=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-3x+8)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{4}{x+1}\right]=0$ donc la droite D est une asymptote à $\mathscr{C}$

2) a) $f'(x)=-3+\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{-3(x+1)^2+4}{(x+1)^2}=\frac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}$

b) $-3x^2-6x+1=0$, $\Delta=36-4\times(-3)=120$ donc $x_1=\frac{6+\sqrt{120}}{-6}=-1-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $x_2=-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		x_1		-1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}-3x+8-\frac{4}{x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}-3x+8-\frac{4}{x+1}=+\infty$

3) $T: y=f'(0)x+f(0)=x+4$

4) La tangente à $\mathscr{C}$ en a est parallèle à $y=-2x$ si, et seulement si, $f'(a)=-2$ c'est-à-dire

$-3+\frac{4}{(a+1)^2}=-2\Leftrightarrow\frac{4}{(a+1)^2}=1\Leftrightarrow 4=(a+1)^2\Leftrightarrow a+1=2$ ou $a+1=-2\Leftrightarrow a=1$ ou $a=-3$

Exercice n° 8

1) $Df=IR\setminus\{-1,1\}$

2) a) Si $x\in Df$ alors $x\neq-1$ et $x\neq1$ donc $-x\neq1$ et $-x\neq-1$ par suite $-x\in Df$

$f(-x)=\frac{-3x}{(-x)^2-1}=-\frac{3x}{x^2-1}=-f(x)$ donc f est impaire est par conséquence $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à $O(0,0)$

b) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x}{x^2-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x}{x^2-1}=-\infty$ donc la droite $\Delta: x=1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=0$ donc la droite $\Delta': y=0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

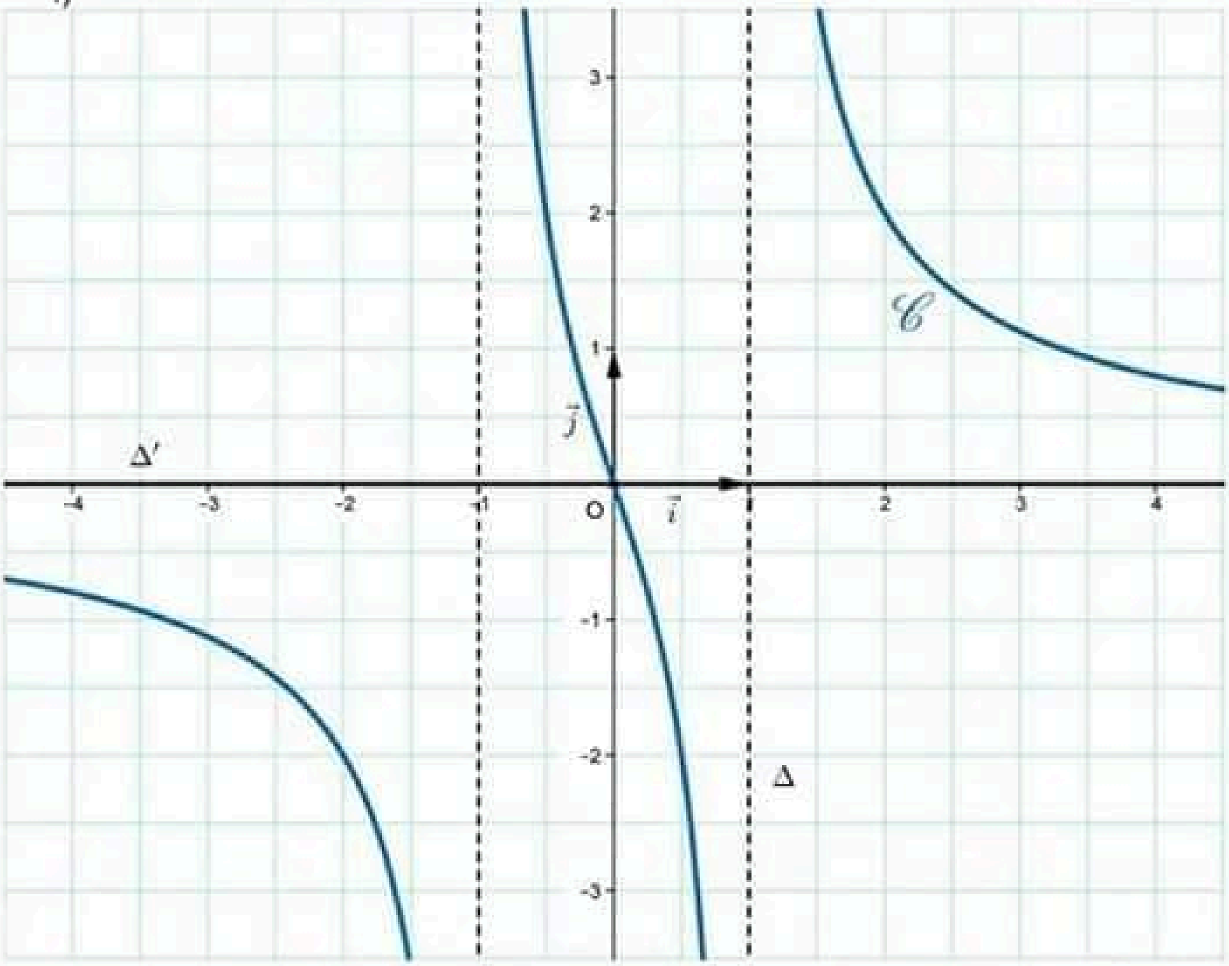
3) a) La fonction f est dérivable sur Df comme étant une fonction rationnelle et on a :

$$f'(x)=\frac{3(x^2-1)-3x(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^2-3-6x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2}=-\frac{3x^2+3}{(x^2-1)^2}<0$$

b)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	0	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	0

4)



Exercice n° 9

1) La fonction f est dérivable sur Df comme étant une fonction rationnelle et on a :

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x+2)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x+2-x^2+x-2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-x+2}{x-2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2-x+2}{x-2}=+\infty$ donc $\mathscr{C}$ possède une asymptote verticale d'équation $x=2$

b)

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	$-$	‖	$-$	0	+	
f	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

3) a) $ax+b+\frac{c}{x-2}=\frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}=\frac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}=\frac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}$

$=\frac{x^2-x+2}{x-2}$

donc $\begin{cases} a=1 \\ -2a+b=-1 \\ -2b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases}$ c'est-à-dire $f(x)=x+1+\dfrac{4}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-2}=0$ donc la droite $\Delta : y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

c)

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
$f(x)-(x+1)=\dfrac{4}{x-2}$	$-$	$+$
Position relative	$\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ	$\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ

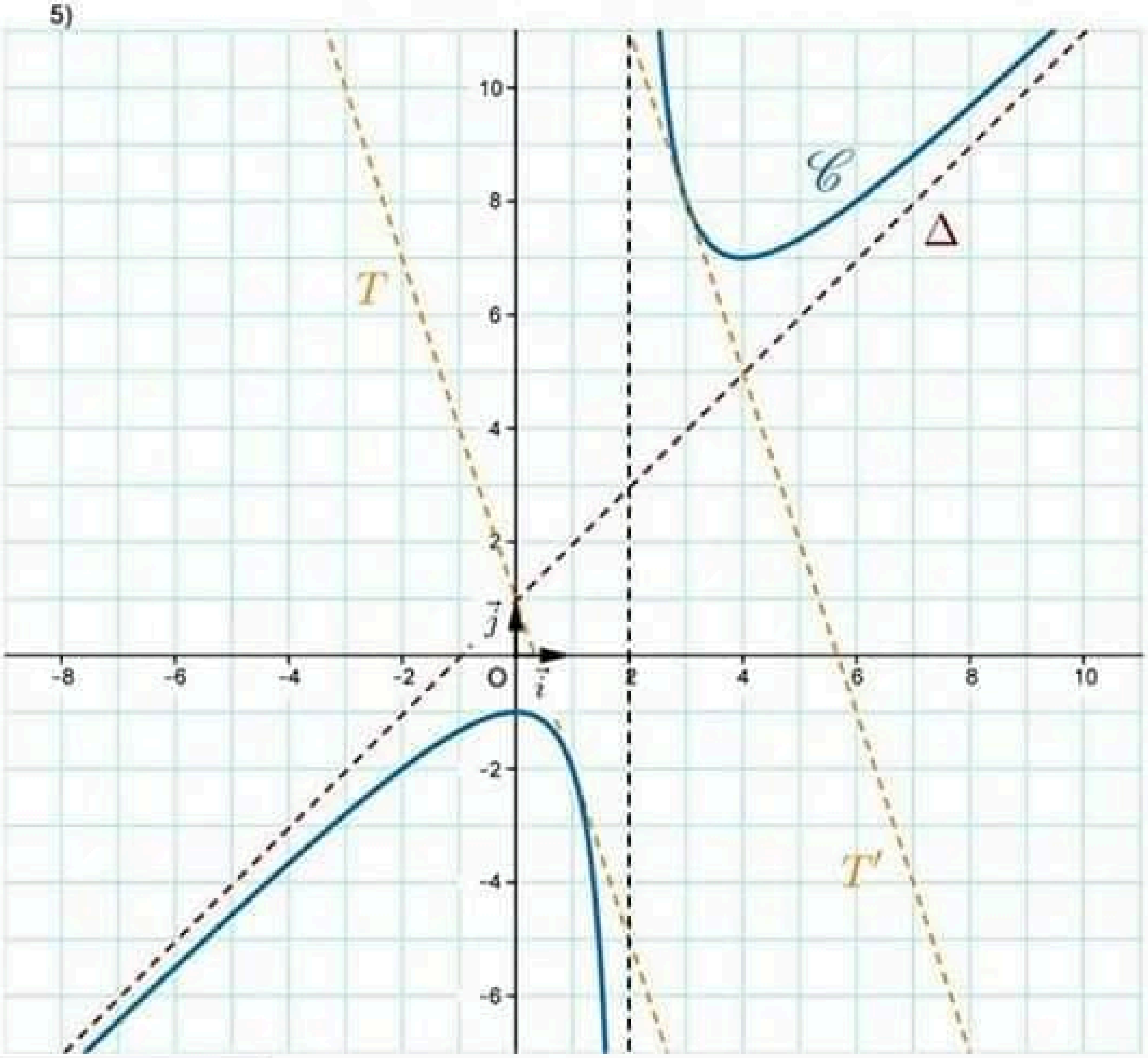
4) La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est parallèle à la droite $y=-3x$ si, et seulement si, $f'(a)=-3$ c'est-à-dire :

$$\frac{a^2-4a}{(a-2)^2}=-3 \Leftrightarrow a^2-4a=-3(a-2)^2 \Leftrightarrow a^2-4a+3(a^2-4a+4)=0 \Leftrightarrow 4a^2-16a+12=0$$

$$\Leftrightarrow a^2-4a+3=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ ou } a=3$$

Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points $A(1,-2)$ et $B(3,8)$ sont parallèles à la droite $y=-3x$

5)



Exercice n° 10

1) L'axe des abscisses est tangente horizontale à $\mathscr{C}$ en 1 donc $f'(1)=0$ et $f(1)=0$

2) a) La fonction f est dérivable sur $IR\setminus\{-1\}$ comme étant fonction rationnelle et on a :

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+1)-(ax^2+bx+1)}{(x+1)^2}=\frac{2ax^2+2ax+bx+b-ax^2-bx-1}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+2ax+b-1}{(x+1)^2}$$

b) $f'(1)=0 \Leftrightarrow \frac{a+2a+b-1}{4}=0 \Leftrightarrow 3a+b-1=0$ et $f(1)=0 \Leftrightarrow \frac{a+b+1}{2}=0 \Leftrightarrow a+b+1=0$ donc :

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ 3a+b-1=0 \end{cases}$$

$L_2-L_1 \Rightarrow 2a-2=0 \Rightarrow a=1$ et $L_1 \Rightarrow b=-2$

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+1}$$

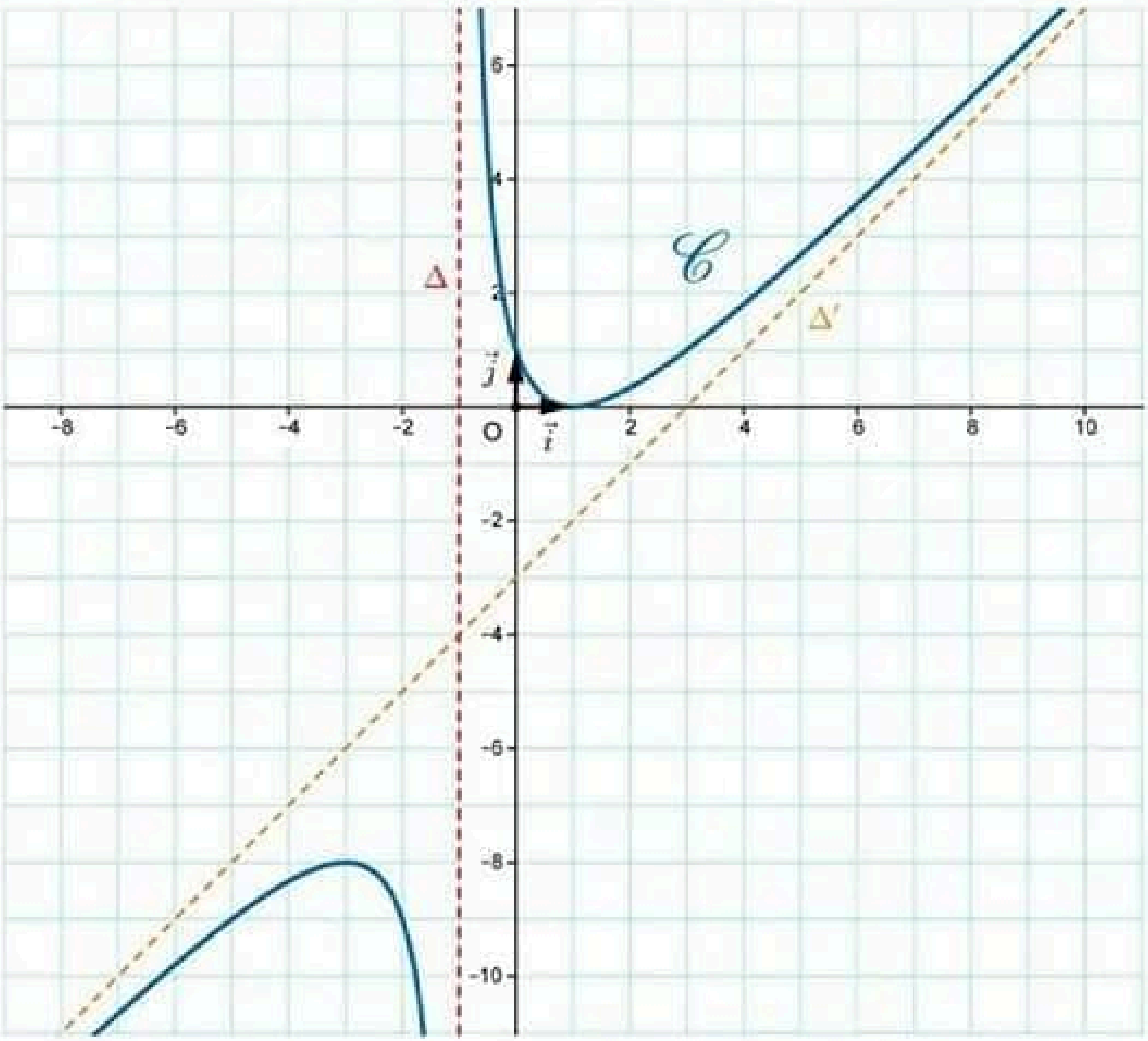
3) a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^2-2x+1}{x+1}=+\infty$ donc la droite $\Delta : x=-1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$

b) Pout tout $x \in Df$, $x-3+\frac{4}{x+1}=\frac{(x-3)(x+1)+4}{x+1}=\frac{x^2+x-3x-3+4}{x+1}=\frac{x^2-2x+1}{x+1}=f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4}{x+1}=0$ donc la droite $\Delta' : y=x-3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ aux voisinages de $+\infty$

d) $f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	-8	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



Exercice n° 11

1) $\mathscr{C}$ passe par $A(2,3)$ donc $f(2)=3 \Leftrightarrow 2a+b+1=3$

$\mathscr{C}$ possède une tangente horizontale en A alors $f'(2)=0$ or $f'(x)=a+\dfrac{1}{(3-x)^2}$ donc $a+1=0$

c'est-à-dire $a=-1$ et $b=4$: $f(x)=-x+4+\dfrac{1}{3-x}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+4)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{3-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+4)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3-x}=0$ donc la droite $\mathscr{D}: y=4-x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

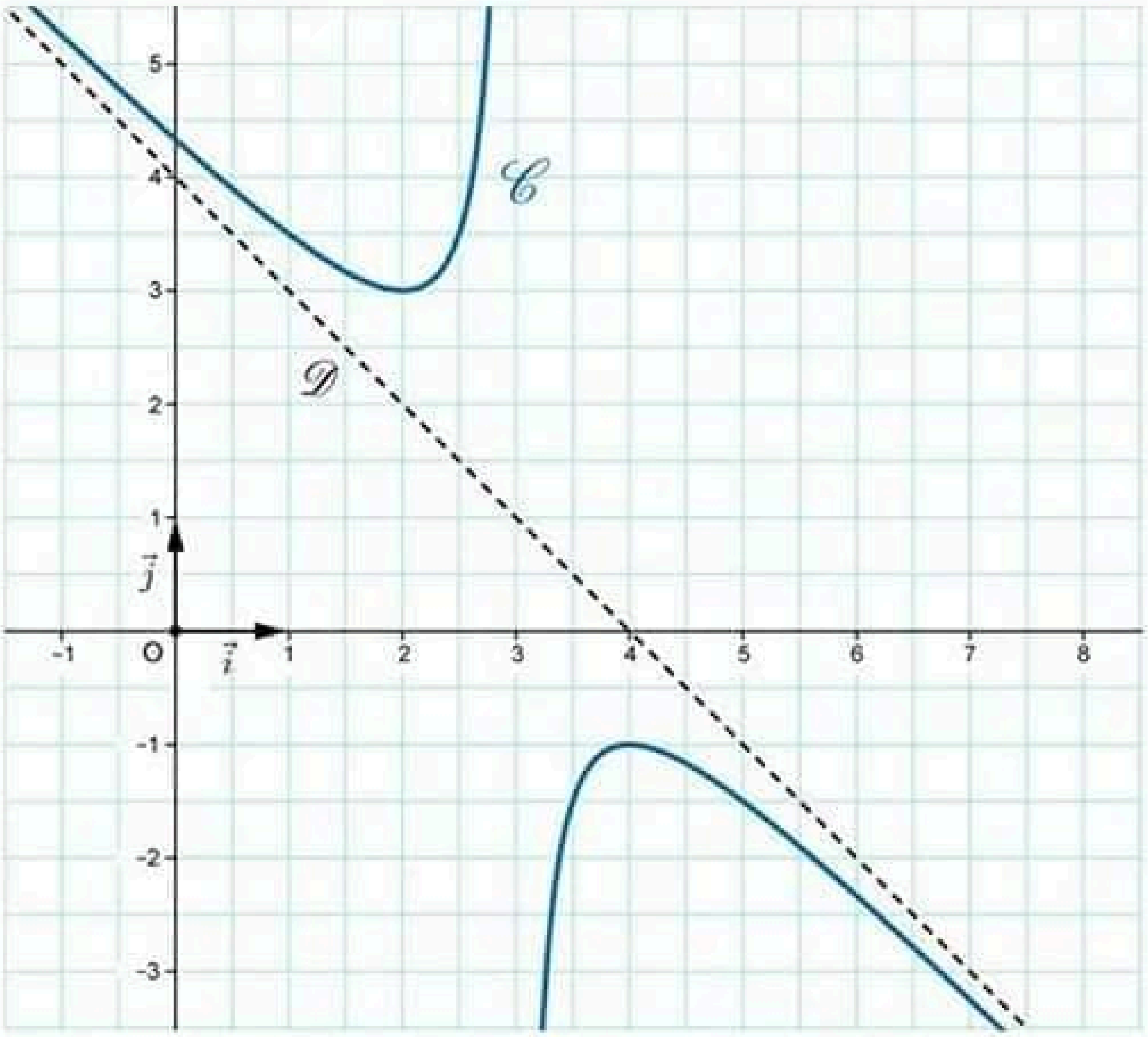
3)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)-(-x+4)=\dfrac{1}{3-x}$	+		−
Position relative	$\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$		$\mathscr{C}$ est au-dessous de $\mathscr{D}$

4) $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}4-x+\dfrac{1}{3-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}4-x+\dfrac{1}{3-x}=-\infty$

5) $f'(x)=-1+\dfrac{1}{(3-x)^2}=\dfrac{-x^2+6x-8}{(3-x)^2}$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	
f	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$



Exercice n° 12

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur IR et on a $g'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{166}{27}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

2) La fonction g est strictement positive sur $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right[$

La fonction g est continue, strictement croissante et change de signe sur $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[$ donc l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique a sur $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[$ et donc sur IR.

$g(-3) = -12$ et $g(-2) = 2$ donc g change de signe sur $]-3, -2[$ et par suite $-3 < a < -2$

3)

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1) a) La fonction f est dérivable sur IR^* comme étant une fonction rationnelle et on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{(2x-3)x^3 - 3x^2(x^2-3x+2)}{x^6} = 1 + \frac{2x^2 - 3x - 3x^2 + 9x - 6}{x^4} = \frac{x^4 - x^2 + 6x - 6}{x^4}$$

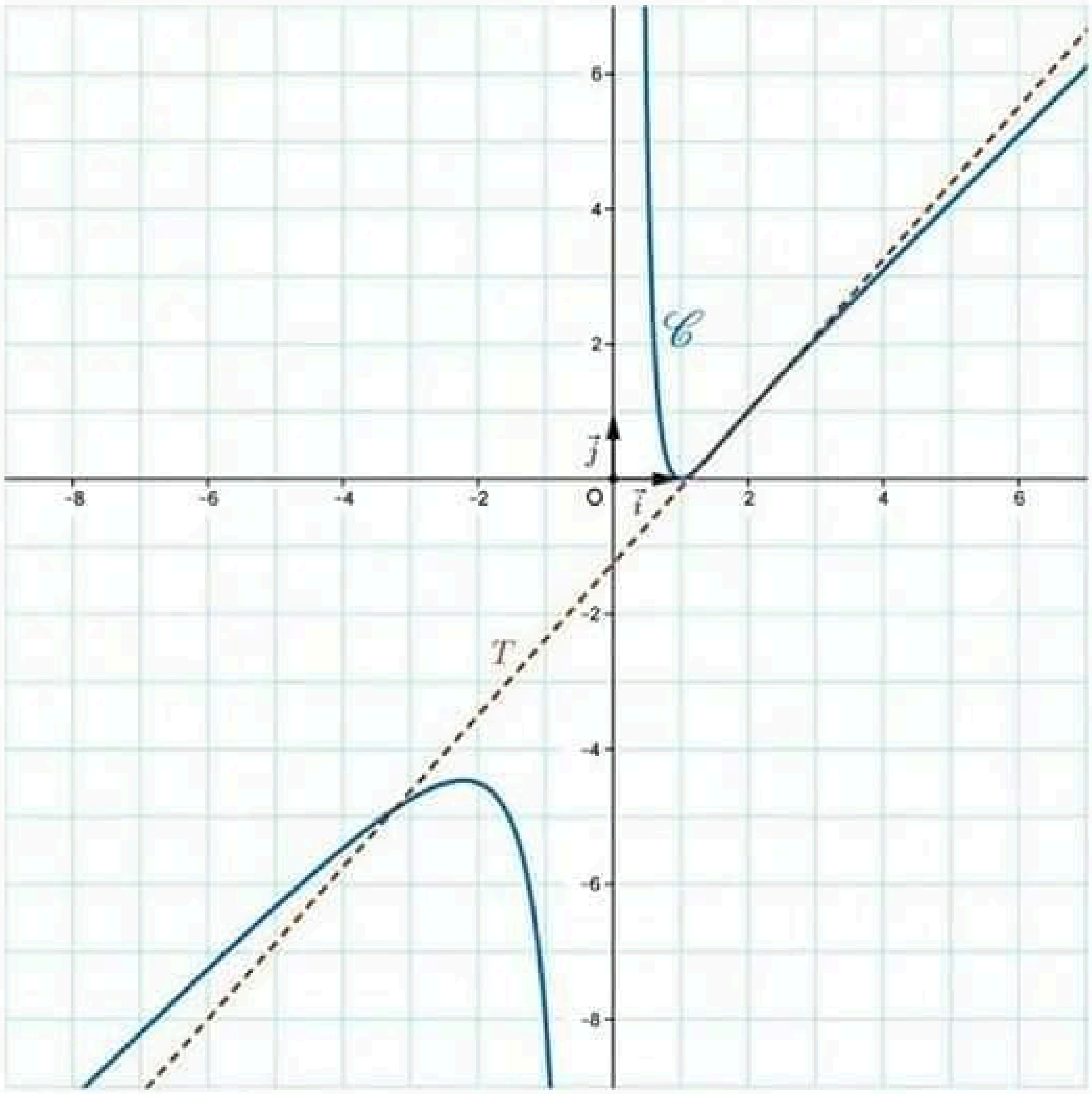
D'autre part on a :

$$\frac{(x-1)}{x^4}g(x) = \frac{(x-1)(x^3+x^2+6)}{x^4} = \frac{x^4 + x^3 + 6x - x^3 - x^2 - 6}{x^4} = \frac{x^4 - x^2 + 6x - 6}{x^4} = f'(x)$$

b)

x	$-\infty$		a		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) $T : y = f'(2)(x-2) + f(2) = \frac{9}{8}(x-2) + 1 = \frac{1}{8}(9x-10)$



Exercice n° 13

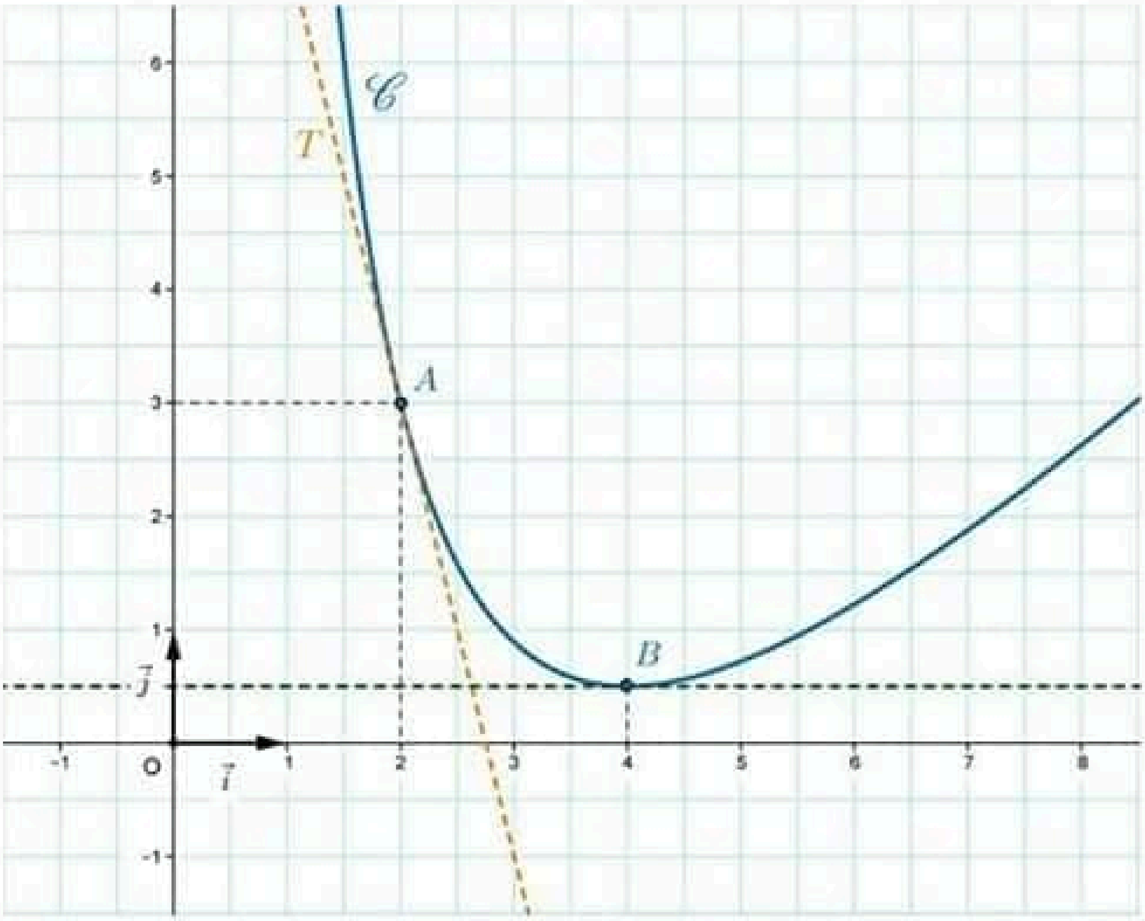
Partie A

1) a)

x	0		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	
F	$\frac{1}{4}$	$\searrow$		$\nearrow$	

b) $T : y = f(2)(x-2) + F(2) = -4(x-2) + 3 = -4x + 11$

2)



Partie B

1) a) $F(x)=x+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2}+k$ et comme $F(4)=\frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{2}=4+\frac{12}{4}+\frac{8}{16}+k \Leftrightarrow 7+k=0 \Leftrightarrow k=-7$

donc $F(x)=x+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2}-7$

b) Une équation de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 2 s'écrit :

$$y=f(2)(x-2)+F(2)=-4(x-2)+3=-4x+11$$

2) $\lim_{x\to 0^+} F(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2}-7\right)=+\infty$ donc l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe de F

3) a) $\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2}-7\right)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}[F(x)-(x-7)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2}\right)=0$ donc la droite $\Delta: y=x-7$ est une asymptote à la courbe de F au voisinage de $+\infty$

Exercice n° 14

1) La fonction f est continue et dérivable sur $]-\infty,2[$ et on a $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{4-2x}}$

x	$-\infty$ 2
f'(x)	−
f	↘

2) $T: y=f'(0)x+f(0)=-\frac{1}{2}x+2$

3) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en a est $f'(a)=-\frac{1}{\sqrt{4-2a}}$

$f'(a)=-\frac{1}{\sqrt{4-2a}}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{4-2a}=4 \Leftrightarrow 4-2a=16 \Leftrightarrow 2a=-12 \Leftrightarrow a=-6$ donc la courbe de f possède en -6 une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$

4) La tangente en a à la courbe de f a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a) = -\frac{(x-a)}{\sqrt{4-2a}}+\sqrt{4-2a}$

La tangente à $\mathscr{C}$ en a passe par le point $A(2,3)$ si, et seulement si,

$$3 = -\frac{(2-a)}{\sqrt{4-2a}}+\sqrt{4-2a} = \frac{-(2-a)+4-2a}{\sqrt{4-2a}} = \frac{2-a}{\sqrt{4-2a}} = \frac{\sqrt{4-2a}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{4-2a}=6 \Leftrightarrow 4-2a=36$$
$$\Leftrightarrow 2a=-32$$
$$\Leftrightarrow a=-16$$

La tangente à $\mathscr{C}$ en -16 passe par le point A

Exercice n° 15

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{x}-1-\sqrt{x}}{x(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-2}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 0 cependant la courbe $\mathscr{C}$ possède une demi-tangente vertical à droite en 0

2) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et on a :

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}-1-\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{2(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+1} = -1$

x	0	$+\infty$
f'(x)	−	
f	1 ↘	−1

4) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $J = f(]0,+\infty[) =]-1,1[$ ce qui revient à dire que f possède une fonction réciproque f^{-1} définie sur J

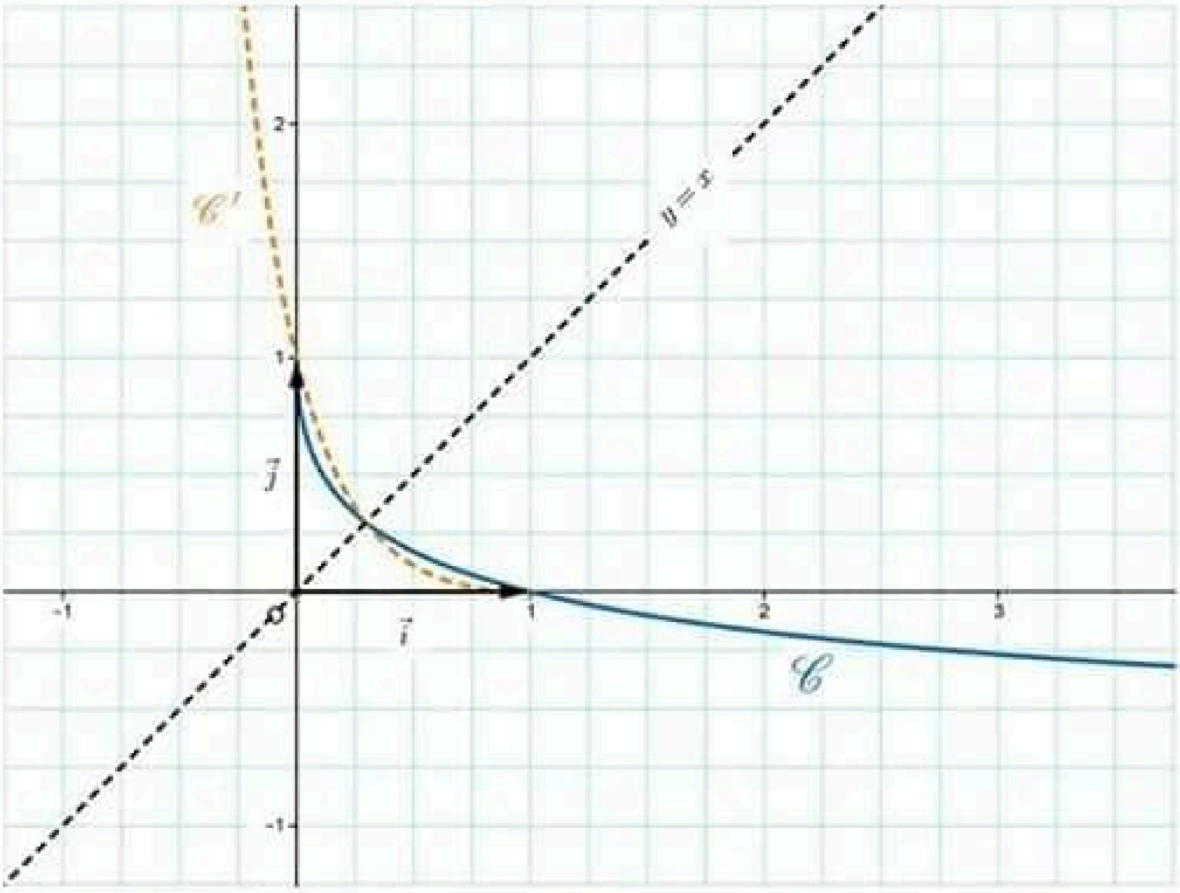
5) f^{-1} est continue et dérivable sur $]-1,1[$

6) $f(4) = -\frac{1}{3}$ donc $f^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = 4$

7) a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $g'(x) = f'(x)-1 = \frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}-1<0$ donc g est strictement décroissante d'autre part g est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues donc g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g(]0,+\infty[) =]-\infty,1[$

b) la fonction g est continue, strictement décroissante et change de signe sur $]0,+\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$, et par conséquence l'équation $f(x)=x$, possède une solution unique α

c) $g(0)=1$ et $g(1)=-1$ donc $0<\alpha<1$



Exercice n° 16

1) a) Si $x \in D_f = IR$ alors $-x \in D_f$ et on a :

$$f(-x) = \cos^2(-2x) - 2\cos^2(-x) = \cos^2(2x) - 2\cos^2 x = f(x)$$

Donc f est paire et par suite $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

b) Si $x \in IR$ alors $(\pi - x) \in IR$ et on a

$$f(\pi - x) = \cos^2(2(\pi - x)) - 2\cos^2(\pi - x) = \cos^2(2x) - 2\cos^2 x = f(x)$$

Donc la droite $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$

c) La fonction f est π-périodique donc il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur π d'autre part $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{2}$ donc il nous suffit d'étudier f sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la courbe $\mathscr{C}$ sera construite en utilisant une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ puis par des translations de vecteur $\pi\vec{i}$

2) a) On a pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4\sin(2x)\cos(2x) + 4\sin x\cos x \\ &= 4\sin x\cos x - 8\sin x\cos x(1 - 2\sin^2 x) \\ &= 4\sin x\cos x(1 - 2(1 - 2\sin^2 x)) \\ &= 4\sin x\cos x(4\sin^2 x - 1) \end{aligned}$$

b) On a pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $4\sin^2 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{\pi}{6}$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		−	0	+	
f	−1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	1

3) a) $4X^4 - 6X^2 + 2 = 0$, $\Delta = 36 - 4 \times 4 \times 2 = 4$ donc $X^2 = \frac{6-2}{8} = \frac{1}{2}$ ou bien $X^2 = \frac{6+2}{8} = 1$ donc

$X=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou bien $X=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X=-1$ ou $X=1$ donc $S_{\mathbb{R}}=\left\{-1,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right\}$

b) $f(x)=-1 \Leftrightarrow \cos^2(2x)-2\cos^2 x=-1 \Leftrightarrow \left(2\cos^2 x-1\right)^2-2\cos^2 x=-1$

$\Leftrightarrow 4\cos^4 x-4\cos^2 x+1-2\cos^2 x+1=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^4 x-6\cos^2 x+2=0$

On pose $X=\cos x$ on aura :

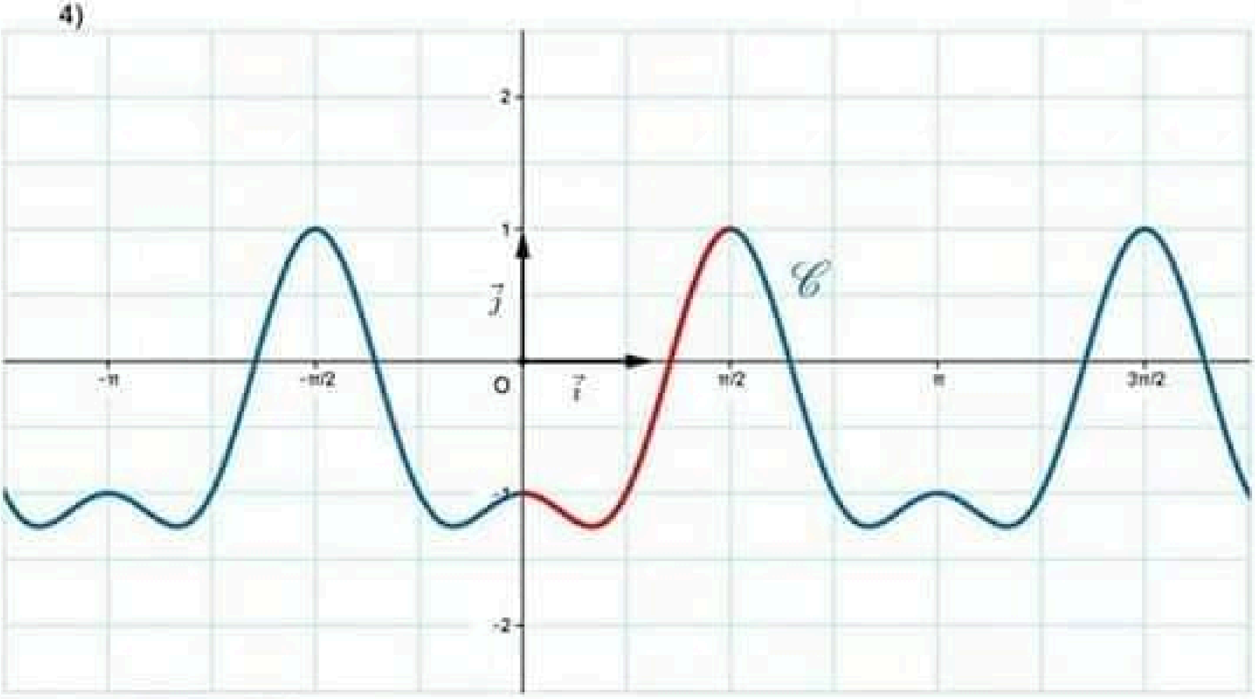
$f(x)=-1 \Leftrightarrow 4X^4-6X^2+2=0 \Leftrightarrow X=-1$ ou $X=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $X=1$

$\Leftrightarrow \cos x=-1$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x=1$

Or $x\in I$ donc $0\le \cos x\le 1$

et par suite $f(x)=-1 \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ ou $x=0$ donc $S_I=\left\{0,\frac{\pi}{4}\right\}$

4)



Exercice n° 17

1) a) La fonction f est 2π -périodique

b) La fonction f est définie sur IR donc si $x\in Df$ alors $-x\in Df$ et on a pour tout x de IR :

$f(-x)=1+2\sin(-x)+\sin(-x)=1-2\sin x-\sin(2x)=2-(1+2\sin x+\sin(2x))=2-f(x)$

Donc le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$

Il suffit donc d'étudier f sur l'intervalle $[0,\pi]$ (la moitié d'un intervalle de longueur 2π et de centre 0)

2) a) La fonction f est dérivable sur IR et on a :

$f'(x)=2\cos x+2\cos(2x)=2\cos x+2\left(2\cos^2 x-1\right)=4\cos^2 x+2\cos x-2$

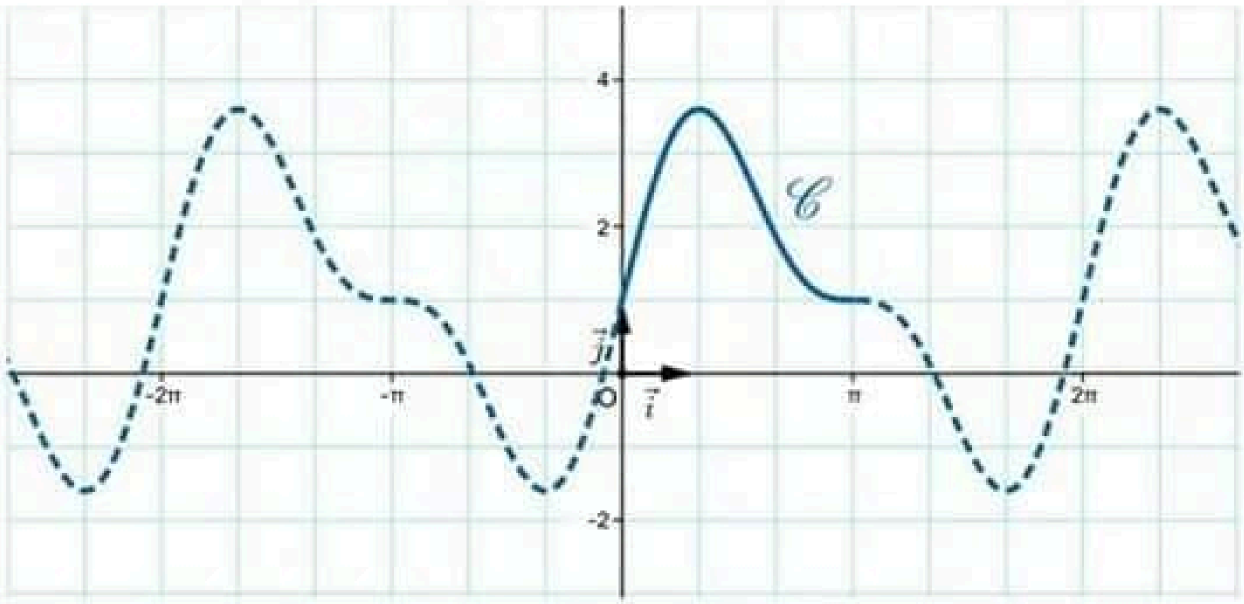
D'autre part on a :

$2(1+\cos x)(2\cos x-1)=2\left(2\cos x+2\cos^2 x-1-\cos x\right)=4\cos^2 x+2\cos x-2=f'(x)$

b) On a pour tout $x\in[0,\pi]$, $1+\cos x\ge 0$ et $2\cos x-1\ge 0 \Leftrightarrow \cos x\ge\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		+	0	−	0
f	1	↗	$\frac{3\sqrt{3}+2}{2}$	↘	1

3)



Exercice n° 18

1) On a pour tout $x \in [0,\pi]$, $1-2\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\sin x$	0	+		+	0
$1-2\cos x$		+	0	−	
$g(x)$	0	+	0	−	0

2) a) Pour tout $x \in Df = IR$ on a $-x \in Df$ et

$f(-x) = \cos(-2x) - 2\cos(-x) = \cos(2x) - 2\cos x = f(x)$ donc f est paire et par conséquence la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) Pour tout $x \in Df = IR$ on a $-x \in Df$ et

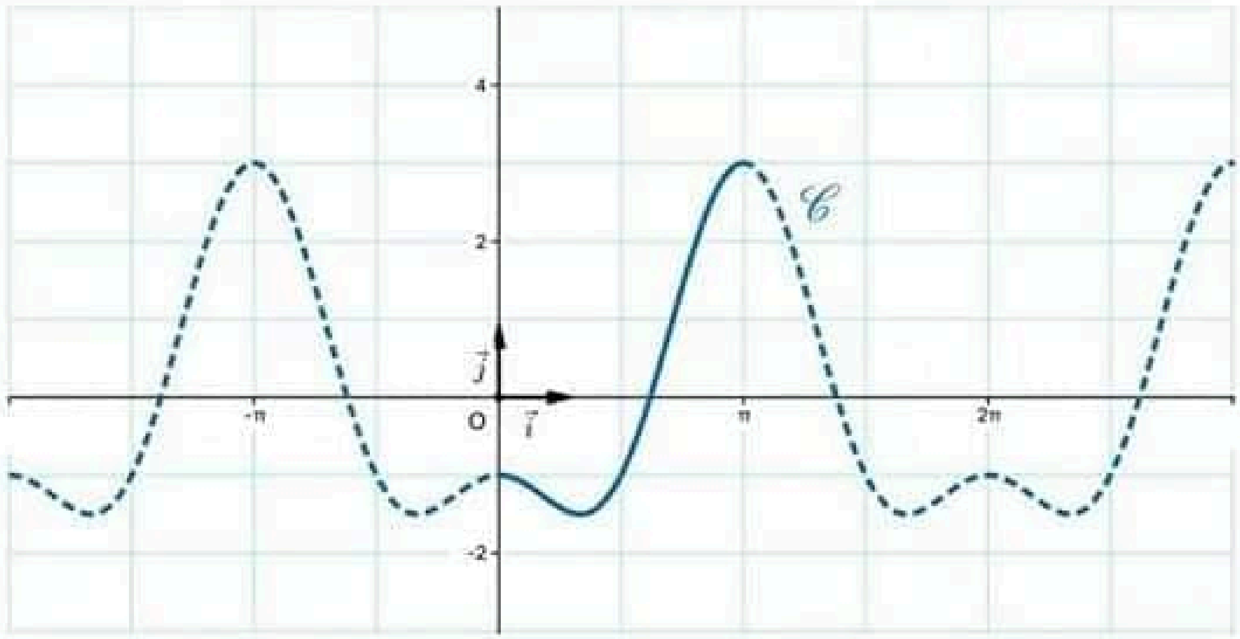
$f(x+2\pi) = \cos(2x+4\pi) - 2\cos(x+2\pi) = \cos 2x - 2\cos x = f(x)$

Donc f est 2π -périodique donc il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π et comme $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées il nous suffit d'étudier f sur la moitié d'un intervalle de longueur 2π de centre 0 soit $[0,\pi]$ par exemple

3) La fonction f est dérivable sur IR et on a :

$f'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin x = 2\sin x - 4\sin x\cos x = 2\sin x(1-2\cos x) = 2g(x)$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	+	0	−	0
f	-1	↗	$-\frac{3}{2}$	↘	3


4
2
-2
-π
π
2π
O
$\vec{i}$
$\vec{j}$
$\mathscr{C}$